26.02.2020 # Изпъкналост и диференцируемост в Банахови пространства

<u>Заб.</u> Ще запазим означенията от книгата на Фелпс

<u>Опр.</u> Нека E е Банахово, $D \subseteq E$ е отворено и изпъкнало. Функцията $f : D \to \mathbb{R}$ наричаме <u>изпъкнала</u>, ако $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\forall t \in [0,1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

<u>Тв. 1</u> Функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е изпъкнала

$$\Updownarrow$$

Надграфиката $\operatorname{epi} f := \{ (x,r) \in E \times \mathbb{R} : x \in D, r \ge f(x) \}$ е изп. множество

<u>Пр. 2</u>

1) Нормите са изпъкнали функции

2) Нека $C \subseteq E$ е непразно, изпъкнало и затворено

Тогава разстоянието до C,

$$d_C : E \to \mathbb{R},$$
$$d_C(x) := \inf_{y \in C} \|x - y\|,$$

е изпъкнала функция.

Наистина, нека $\varepsilon > 0$ и $x_\varepsilon \in C : \|x_\varepsilon - x\| < d_C(x) + \varepsilon$

$y_\varepsilon \in C : \|y_\varepsilon - y\| < d_C(y) + \varepsilon$

Нека $t \in [0,1]$. Тогава

$$d_C(tx + (1-t)y) = \inf_{z \in C} \| tx + (1-t)y - z \| \le \| (tx + (1-t)y) - (tx_\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon) \| \le$$

$$\le t\|x - x_\varepsilon\| + (1-t)\|y - y_\varepsilon\| < t d_C(x) + (1-t) d_C(y) + \varepsilon$$

При $\varepsilon \to 0$, $d_C(tx + (1-t)y) \le t d_C(x) + (1-t) d_C(y)$

$\Rightarrow d_C$ е изпъкнала функция

3) sup на изпъкнали функции е изпъкнала функция, защото сечението на изпъкналите им надграфики е изпъкнало

4) Нека C е непразно ограничено множество

Тогава $f(x) := \sup\limits_{y \in C} \|x - y\|$ е изпъкнала функция като sup на изпъкнали функции

5) Сублинейните функционали, т.е. функции от типа

$p : E \to \mathbb{R}$,

$p(tx) = t\,p(x),\ t \geq 0$,

$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,

са изпъкнали.

6) Нека $C \subseteq E$ е изпъкнало множество и $0 \in \operatorname{int} C$

Функционалът на Минковски за C,

$p_C : E \to \mathbb{R}$,

$p_C(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda C\}$,

е сублинеен и, следователно, изпъкнал.

<u>Опр.</u> Нека $D \underset{\text{отв.}}{\subseteq} E$ и $f : D \to \mathbb{R}$ са изпъкнали и $h \in E$, $x_0 \in D$.

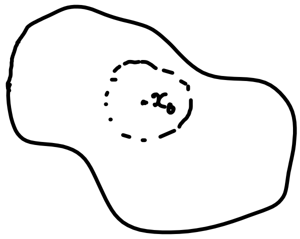
Дефинираме <u>дясна производна по направление</u>

$$d^+ f(x_0)(h) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

<u>Тв.3</u> $-d^+ f(x_0)(-h) \leq d^+ f(x_0)(h)$

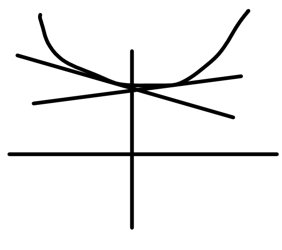
<u>Д-во</u> Нека $\delta > 0$ е такова, че $x_0 + th \in D$ за $t \in (-\delta, \delta)$.

Първо ще докажем, че диференчното частно



$\dfrac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$ расте по t. Наистина,

ако $0 < s < t$, то $x_0 + sh = \frac{s}{t}(x_0 + th) + (1 - \frac{s}{t})x_0$



$$f(x_0 + sh) \leq \frac{s}{t}\left[f(x_0 + th) - f(x_0)\right] + f(x_0)$$

$$\frac{f(x_0 + sh) - f(x_0)}{s} \leq \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

$f(x_0) = f(x_0 - \frac{1}{2}th + \frac{1}{2}th) = \frac{1}{2}[f(x_0 - th) + f(x_0 + th)]$

Тогава $-\dfrac{f(x_0 + t(-h)) - f(x_0)}{t} = \dfrac{f(x_0 + (-t)h) - f(x_0)}{(-t)} \leq \dfrac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$

$\Rightarrow -d^+ f(x_0)(-h) \leq d^+ f(x_0)(h)$

<u>Опр.</u> Нека $D \underset{\text{отв.}}{\subseteq} E$, $f: D \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in D$.

Казваме, че <u>f е диференцируема по Фреше</u> в т. x_0, ако съществува непр. линеен функционал $f'(x_0) \in E^*$, такъв че

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + o(\|h\|)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h, \|h\| < \delta : \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)\| < \varepsilon \cdot \|h\|$

<u>f е диференцируема по Гато в т. x_0</u>, ако същ. $df(x_0) \in E^*$:

$df(x_0)(h) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$.

<u>Тв. 4</u> Ако f е диф. по Фреше в т. x_0, тя е диф. по Гато в т. x_0. Ако f е диф. по Гато в т. x_0 и границата е равномерна по $h \in B(0)$, f е диф. по Фреше в т. x_0.

<u>Тв. 5</u> Нека $D \underset{\text{отв.}}{\leq} E$ и $f: D \to \mathbb{R}$ са изпъкнали и $x_0 \in D$. Тогава $d^+ f(x_0): E \to \mathbb{R}$ е сублинеен функционал.

<u>Д-во</u>

$$\frac{f(x_0 + t(h + k)) - f(x_0)}{t} = \frac{f(\frac{1}{2}(x_0 + 2th) + \frac{1}{2}(x_0 + 2tk)) - f(x_0)}{t} \leq$$

$$\leq \frac{f(x_0 + 2th) - f(x_0)}{2t} + \frac{f(x_0 + 2tk) - f(x_0)}{2t}$$

□

<u>Тв. 6</u> Нека $D \underset{\text{отв.}}{\subseteq} E$ и $f: D \to \mathbb{R}$ са изпъкнали и $x_0 \in D$. Ако в

$-d^+ f(x_0)(-h) \leq d^+ f(x_0)(h)$

се достига равенство, f е диф. по Гато в т. x_0

Лема 7 Нека $p: E \to \mathbb{R}$ е сублинеен функционал.
Тогава p е линеен $\Leftrightarrow p(-h) = -p(h) \ \forall h \in E$

Д-во $(\Rightarrow)$ Очевидно

$(\Leftarrow)$ Нека $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $x, y \in E$

$$p(\lambda x + \mu y) \leq \lambda p(x) + \mu p(y) \qquad (1)$$

$$p((-\lambda)x + (-\mu)y) \leq -\lambda p(x) - \mu p(y)$$

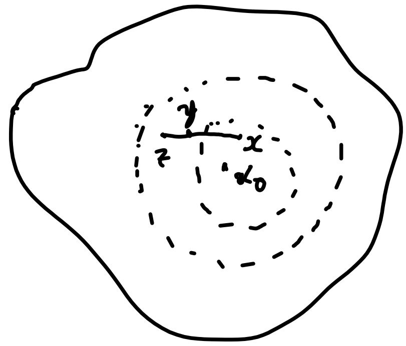
$$\Rightarrow \underbrace{-p(-\lambda x - \mu y)}_{\substack{\parallel \ -p(h) = p(-h) \\ p(\lambda x + \mu y)}} \geq \lambda p(x) + \mu p(y) \qquad (2)$$

От (1) и (2) $\Rightarrow \lambda p(x) + \mu p(y)$ □

Тв. 8 За изпъкнали функции, локална ограниченост $\Rightarrow$ локална Липшицовост

Д-во Нека $\delta > 0$, такова че $\overline{B_{2\delta}}(x_0) \subseteq D$. Тогава $\exists M > 0$:
$\forall x \in \overline{B_{2\delta}}(x_0)$, $|f(x)| \leq M$.

Нека $x, y \in \overline{B}_\delta(x_0)$. Полагаме $\alpha := \|y - x\|$ и



$$z := y + \frac{\delta}{\alpha}(y - x) \in \overline{B_{2\delta}}(x_0)$$

$$\alpha z = \alpha y + \delta y - \delta x$$

$$\Rightarrow y = \frac{\alpha z + \delta x}{\alpha + \delta} = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} z + \frac{\delta}{\alpha + \delta} x$$

$\Rightarrow y$ е изпъкнала комбинация на x и z.

$$\Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \left| \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(z) + \frac{\delta - (\alpha + \delta)}{\alpha + \delta} f(x) \right| = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} \underbrace{|f(z) - f(x)|}_{\leq \underbrace{|f(z)|}_{\leq M} + \underbrace{|f(x)|}_{\leq M}} \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} \cdot 2M \leq \frac{\alpha}{\delta} 2M$$

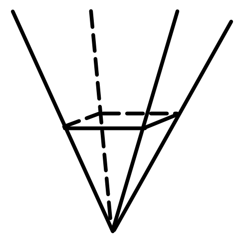
$$|f(y)| - f(x)| \leq \frac{2M}{\delta} \|y - x\|$$

□

Тв. 9 Ако f е локално ограничена и $df(x_0)(h)$ е линеен функционал, то f е диф. по Гато в т. x_0.

Тв.10 f е изп. и непр. в x_0, то f е локално Липшицова

Упр. 11 Разгл. ℓ_1



$x = (x_n)_n \in \ell_1$

$f(x) := \|x\|_1$

(а) f е диф. по Гато в x, ако $x_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Наистина, нека $x_{n_0} \neq 0$.

$e_{n_0} = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{n_0}, 0, \dots)$

$$\frac{\|x + te_{n_0}\|_1 - \|x\|_1}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| + |t| - \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|}{t} = \frac{|t|}{t} \underset{t\to 0}{\not\longrightarrow}$$

Нека $x = (x_n)_n$, $x_n \neq 0 \ \forall n$. $\operatorname{sgn} x_n \in \ell^{\infty}$ е кандидат за производна.

Разгл. $\left| \frac{\|x+th\|_1 - \|x\|_1}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n \operatorname{sgn} x_n \right|$

Нека $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}^{>0} : \sum_{n=N+1}^{\infty} |h_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists \delta > 0 : \forall t : |t| < \delta, \ \forall n \in \{1, \dots, N\}, \ \operatorname{sgn}(x_n + th_n) = \operatorname{sgn} x_n$$

$$\left| \frac{\|x+th\|_1 - \|x\|_1}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n \operatorname{sgn} x_n \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\sum_{n=1}^{N}|x_n + th_n| - \sum_{n=1}^{N}|x_n|}{t} - \sum_{n=1}^{N} h_n \operatorname{sgn} x_n \right| + \left| \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n + th_n| - \sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|}{t} - \sum_{n=N+1}^{\infty} h_n \operatorname{sgn} x_n \right| \leq$$

$$\leq \overbrace{\left| \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n + th_n)\operatorname{sgn} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n \operatorname{sgn} x_n}{t} - \sum_{n=1}^{N} h_n \operatorname{sgn} x_n \right|}^{=} + \overbrace{\left| \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n| + |t|\sum_{n=N+1}^{\infty}|h_n| - \sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|}{t} - \sum_{n=N+1}^{\infty} h_n \operatorname{sgn} x_n \right|}^{\leq} =$$

$$= 0 + \left| \frac{|t|}{t}\sum_{n=N+1}^{\infty}|h_n| - \sum_{n=N+1}^{\infty} h_n \operatorname{sgn} x_n \right| \leq 0 + \overbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty}|h_n|}^{< \frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty}|h_n| \operatorname{sgn} h_n \operatorname{sgn} x_n}^{< \sum_{n=N+1}^{\infty}|h_n| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} x_n$ е производна по Гато на $f(x) = \|x\|_1$ в т. x.

(б) f не е диф. по Фреше никъде

$h^m := (\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, -2x_{m+1}, -2x_{m+2}, \dots)$

Очевидно $\|h^m\|_1 \xrightarrow[m\to 0]{} 0$. Разгл. $\left| \|x+h^m\|_1 - \|x_1\| - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^m \operatorname{sgn} x_n \right|$

$$\|x+h^m\|_1 = \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n - 2x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$$

$$\Big|\underbrace{\|x+h^m\|_1 - \|x\|_1}_{0} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^m \operatorname{sgn} x_n\Big| = \Big|\sum_{n=m+1}^{n} (-2) x_n \cdot \operatorname{sgn} x_n\Big| = \sum_{n=m+1}^{\infty} |-2x_n| = \|h^m\|_1$$

$$|f(x+h^m) - f(x) - df(x)(h^m)| = \|h^m\|_1 \notin o(\|h^m\|_1)$$

Тв. 12 В крайномерни пространства, изпъкналите функции са непрекъснати във вътрешността на деф. си област

Пр. 13 $f(x) := \|x\|^2$

$\Rightarrow f'(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$. Наистина,

$$\|x+h\|^2 = \langle x+h, x+h\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,h\rangle + \langle h,h\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,h\rangle + \|h\|^2$$

$$f(x+h) - f(x) - 2\langle x,h\rangle = \|h\|^2 \in o(\|h\|)$$

Тв. 14 (1.14d от книгата)

E - Хилбертово

$C \subseteq E$ - изп. и затв.

$$f(x) := \frac{\|x\|^2 - \|x - d_C(x)\|^2}{2}$$

f е диф. по Фреше с производна $f'(x) = d_C(x)$

Пр. 15 В $\mathbb{R}^1$, всяка изпъкнала функция е диф. почти навсякъде.

В $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) := |x|$ е изпъкнала, но не е диф. в правата $x=0$.

Опр. Нека E е Банахово. E се нарича (слабо) Асплундово, ако $\forall$ изп. непр. $f : \underset{\text{отв. изп.}}{D} \to \mathbb{R}$, $\{x \in D \mid f$ е диф. по Фреше (Гато)$\}$ е резидуално по Бер.

Т-ма 16 (Мазур, 1933) сепарабелните Банахови пространства са слабо Асплундови

04.03.2020

Тв. 17 $D \underset{\text{отв.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ и $f: D \to \mathbb{R}$ е локално липшицова и диф. по Гато в т. $x_0 \in D$.
$\Rightarrow f$ е диф. по Фреше

Полунепрекъснатост в $\mathbb{R}^n$

Опр. Нека X, Y - топологични пространства и $T: X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение с $Tx \neq \emptyset \ \forall x \in X$

T се нарича <u>полунепрекъсната отгоре в т. $x_0 \in X$</u> (upper semicontinuous/ usc),
ако $\forall U \underset{\text{отв.}}{\subseteq} Y: Tx_0 \subseteq U, \ \exists V \underset{\text{отв.}}{\subseteq} X: \forall x \in V, \ Tx \subseteq U$

$T_{-1}(U) := \{x \in X : Tx \subseteq U\}$ - <u>малък първообраз</u>

$T^{-1}(U) := \{x \in X : Tx \cap U \neq \emptyset\}$ - <u>голям първообраз</u>

T е usc в $X \Leftrightarrow \forall U \underset{\text{отв}}{\subseteq} Y, \ T_{-1}(U) \underset{\text{отв.}}{\subseteq} X$

T се нарича <u>полунепрекъсната отдолу в т. $x_0 \in X$</u> (lower semicontinuous/lsc),
ако $\forall U \underset{\text{отв.}}{\subseteq} Y, \ U \cap Tx_0 \neq \emptyset, \ \exists V \underset{\text{отв.}}{\subseteq} X: \forall x \in V, \ Tx \cap U \neq \emptyset$

T е lsc в $X \Leftrightarrow \forall U \underset{\text{отв.}}{\subseteq} Y, \ T^{-1}(U) \underset{\text{отв.}}{\subseteq} X$

Тв. 18 Нека Y е T_3. Ако T е lsc в X
$\Rightarrow Gr\, T := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Tx\}$ е затв. в $X \times Y$.

Опр. (субдиференциал)
$D \subseteq E$ - отв. и изп., $f: D \to \mathbb{R}$ - изп. и непр.
$\partial f(x) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \ \forall y \in D\}$
$\partial f(x)$ е непразно, ограничено и w^*- компактно
$\partial f: D \rightrightarrows X^*$ е usc от $\|\cdot\|$ в w^*

Тв. 19 f е диф. по Гато $\Leftrightarrow \partial f(x)$ има само една точка.

Тв. 20 Ако Y е T_2 компакт, $T: X \to Y$ и $Gr\, T$ е затв. $\Rightarrow T$ е usc.

Пр. 21 ℓ^∞ не е слабо асплундово
ℓ^∞ не е сепарабелно, защото редиците от 1 и 0 са неизброимо

много.

$p(x) := \limsup |x_n|$

p е полунорма $\Rightarrow$ p е непрекъсната ($0 \le p(x) \le \|x\|_\infty$) и изпъкнала (от субличейност)

p не е диф. в нито една точка. Наистина, нека $x = (x_n)_n$.

<u>1 сл.</u> $p(x) = 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$h := (1, 1, \dots)$

$$\frac{p(x+th) - p(x)}{t} = \frac{\limsup |x_n + t|}{t} = \frac{|t|}{t} \underset{t\to 0}{\not\to}$$

<u>2 сл.</u> б.о.о. $p(x) = 1$

Нека $(x_{n_k})_k : x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

Нека $h \in \ell^\infty : h_n = \begin{cases} 0, & n \text{ е нечетно} \\ 1, & n \text{ е четно} \end{cases}$

$$\frac{p(x+th) - p(x)}{t} = \frac{\limsup |x_n + th_n| - 1}{t} \qquad (1)$$

Ако $t > 0$, $|x_{n_{2k}} + t| \to 1 + t$

$\Rightarrow (1) = \frac{1 + t - 1}{t} = 1$

Ако $t \in (-1, 0)$, $|x_{n_{2k}} - t| \to 1 - t < 1$

$x_{n_{2k+1}} \to 1$

$\Rightarrow (1) = \frac{1 - 1}{t} = 0$

$\Rightarrow p$ не е диф. по Гато. $\square$

<u>Лема 22</u> $D \subseteq E$ - отв. мн., f - мн. и $x_0 \in D$

f е диф. по Фреше в $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x+th) + f(x-th) - 2f(x)}{t} = 0$ равн. по $h \in B$

f е диф. по Гато в $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x+th) + f(x-th) - 2f(x)}{t} = 0$

<u>Д-во</u> (за Фреше)

$(\Rightarrow)$ $\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t} + \dfrac{f(x-th)-f(x)}{t}$

$\downarrow$ $t\to 0$ равн. по h $\quad$ $\downarrow$ $t\to 0$ равн. по h

$f'(x)(h) + f'(x)(-h) = 0$

$(\Leftarrow)$ $x = \frac{1}{2}(x+th) + \frac{1}{2}(x-th)$

$f(x)$ е изп. $\Rightarrow$ $f(x) \le \frac{1}{2} f(x+th) - \frac{1}{2} f(x-th)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall h \in B\ \forall t\in(0,\delta),\ 0 \le f(x+th) + f(x-th) - 2f(x) \le t\varepsilon$

$x^* \in \partial f(x)$

$\langle x^*, th\rangle \le f(x+th) - f(x)$

$\langle x^*, -th\rangle \le f(x-th) - f(x)$

$\Rightarrow f(x+th) - f(x) - \langle x^*, th\rangle \le t\varepsilon - f(x-th) + f(x) - \langle x^*, th\rangle \le t\varepsilon$

$\Rightarrow x^* = f'(x)$.

$\square$

Заб. Асплундовите пространства са по-прости от слабо асплундовите, защото диф. по Фреше точки са винаги G_δ.

Лема 23 $D \subseteq E$ - отв., изп., $f : D \to \mathbb{R}$ - изп.

$\Rightarrow G = \{x \in D : f$ е диф. по Фреше в $x\}$ е G_δ.

Т-ма 16 (Мазур, 1933)

E - сеп. Банахово

D - отв. изп.

$f : D \to \mathbb{R}$ - изп. непр.

$\Rightarrow \{x \in D : f$ е диф. по Гато в $x\}$ е резидуално в D